EL NÚMERO π Y SU HISTORIA*

Simon Reif Acherman**

"Leer la historia del número π permite penetrar en el centro del mundo matemático, ese maravilloso mundo en donde la imaginación tiene su más bella parte".

Paul Dubreil

* Tomado de la Revista de la Universidad del Valle, Volumen 1 - Año 1 - No. 1 de Octubre de 1990, con autorización expresa del autor.

** Ingeniero Químico de la Universidad del Valle, profesor Asistente de la Escuela de Ingeniería Química de la Facultad de Ingeniería de la misma Universidad.

RESUMEN

El número π es posiblemente la constante numérica más estudiada a lo largo de la historia. Su entorno, aunque en apariencia sólo a nivel matemático, ha trascendido las fronteras de esta disciplina y es así como ha suscitado el interés de hombres en diversas áreas del conocimiento. La revisión de su desarrollo histórico es, por tanto, una combinación amena de aspectos científicos, anecdóticos y culturales.

ABSTRACT

Number π is probably the most studied numerical constant through history. However, its background which was, apparently, only mathematical in nature, has overpassed the limits of this discipline and, in this way, has raised men 's interests in different areas of knowledge. The review of its historical development is, therefore, a delightful combination of cultural, anecdotic, and scientific aspects.

INTRODUCCIÓN A LA HISTORIA

La historia de las ciencias constituye, sin lugar a dudas, una de las áreas del dominio intelectual que registra un aumento cada vez mayor de interés en lo que a número de publicaciones y divulgación en general se refiere. Esta situación tiene una serie de explicaciones evidentes. Prácticamente todo lo que rodea y conforma una era tecnológica como la actual se fundamenta en principios científicos, ya sea de beneficio para el hombre o no. Puede decirse que la ciencia ha puesto su marca en todas las actividades de la vida, a tal punto que se justifica plenamente que se la considere el fenómeno más significativo de los tiempos modernos. Siendo esto así, resulta apenas obvio que, desde el punto de vista de la historia de la cultura, sea importante mostrar cómo la ciencia natural ha ido evolucionando hasta constituirse en lo que en la actualidad incluye y representa.

En un terreno más específico, las matemáticas no se apartan para nada de los planteamientos anteriores. Más aún, si se las reconoce como un dominio de la actividad intelectual, íntimamente relacionado no sólo con la astronomía y la mecánica, como por lo general se menciona, sino con la arquitectura, la tecnología, la filosofía e incluso la religión; y se acepta, dada la innumerable cantidad de casos estudiados y ejemplos conocidos, que factores permanentemente ligados con la evolución de la civilización, como las condiciones sociales y políticas características imperantes de cada época, han resultado elementos de gran importancia para el florecimiento y el carácter de la ciencia, resulta lógico concluir que en cierto grado la historia de las matemáticas es un reflejo de la historia de la cultura (Bochner, 1966).

En el campo de las matemáticas, la historia del número π constituye un punto especial. Si bien otros temas como el recuento de los sistemas de numeración, la investigación de la distribución de los números primos, las aproximaciones de raíces cuadradas - como por ejemplo del número dos -, el estudio de los diferentes poliedros (regulares o no) y ciertos problemas clásicos de construcciones geométricas, pueden considerarse tan representativos del mundo matemático como la historia de la constante universalmente conocida 3.14159..., también resulta cierto que ninguno de aquellos temas, y en particular ningún otro número, ha recibido más atención individual en todo el sentido que π. Cualquiera de los temas planteados puede mostrar que la matemática es una ciencia viva y diversificada, pero ninguno como la historia de π para ejemplificar cómo un mismo problema puede ser abordado de diversas maneras con métodos de solución que dependen de la época, las notaciones utilizadas, los problemas matemáticamente relacionados, etc..

El número π es la razón del perímetro de un círculo cualquiera a su respectivo diámetro. Prácticamente cualquier persona con algún grado de educación matemática ha tenido contacto con esta constante geométrica, ya sea a nivel elemental en los simples cálculos de perímetros, áreas de planos circulares, o volúmenes de figuras cilíndricas o cónicas, o en un grado mucho más sofisticado, en la solución de ecuaciones diferenciales de diferente orden que representan modelos de comportamiento de una gran gama de fenómenos físicos, en estudios de tipo estadístico, etc. En la gran mayoría de estos casos, por no decir en todos, el valor numérico que se utiliza es el de $\pi=3.14$, o en situaciones de una indispensable mayor precisión $\pi=3.14159$. Algunas personas presentan un conocimiento un poco más amplio de π al saber que se trata de una constante numérica *irracional y trascendente*, aunque los significados respectivos de estas dos palabras no siempre están muy claros para ellas.

La información conocida sobre esta constante no se reduce, sin embargo, a su valor numérico con una precisión dada por unas pocas cifras decimales. Existe una gran cantidad de aspectos asociados con π que resultan desconocidos para el común de la gente que utiliza la constante; por ejemplo, el hecho de que su historia comprende más de tres mil años ricos en toda clase de elementos y curiosidades matemáticas; que los diferentes métodos utilizados para su determinación cuantitativa involucran no sólo la geometría elemental, sino también el álgebra y el cálculo analítico; que el número de cifras decimales ha sido motivo de investigación y de trabajos cada vez más impresionantes y, así como estos, muchos detalles más. En este punto radica el propósito principal de este artículo; mostrar algunos de los aspectos más relevantes en la historia de π, una constante numérica que ha motivado el interés de la mayor parte de los más famosos matemáticos de la humanidad, y que, en la medida en que se esté más familiarizado con altas matemáticas, se encuentra con sorpresa en los lugares más inesperados del álgebra, el análisis, la teoría de números, la probabilidad, la estadística, y otras áreas más.

La extraña fascinación que parece despertar este número ha inspirado no sólo el trabajo de matemáticos, algunos brillantes y no pocos anónimos, sino también las actividades propias y elucubraciones de poetas, filósofos, políticos, astrónomos, coleccionistas, ilusos, ingenuos y aún estafadores. Tal vez si se conoce buena parte de esta historia adquiera mayor sentido la frase del famoso matemático inglés y maestro de la paradoja, Augusto de Morgan, al hacer referencia a "... este misterioso 3.14159... el cual aparece en cada puerta y ventana, y bajo cualquier chimenea".

MARCO GENERAL

La historia del número π puede dividirse en tres períodos claramente establecidos, los cuales se diferencian entre sí por aspectos relacionados con el método, propósitos inmediatos y las herramientas científicas e intelectuales disponibles.

El primer período cubre el tiempo transcurrido entre los primeros registros de determinaciones empíricas de la relación del perímetro de una circunferencia y su diámetro hasta la invención del cálculo diferencial e integral a mediados del siglo XVII. En este intervalo de tiempo se puede hablar de algunas aproximaciones de π por parte de los Babilonios, los Egipcios y los Hebreos, pero esencialmente incluye los trabajos de los Griegos y algunas reglas empíricas encontradas en antiguos tratados matemáticos chinos e hindúes. A lo largo de este período, pero sobre todo en los siglos finales, aparece una gran cantidad de intentos por dar solución por medio de construcciones geométricas al célebre problema de la cuadratura del círculo: cómo construir un cuadrado cuya área sea exactamente igual a la de un círculo hecho con anterioridad, ayudándose sólo de regla y compás. Este problema es, por completo equivalente al conocido como de la rectificación del círculo, el cual consiste en construir una línea recta de igual longitud al perímetro de una circunferencia. En ambos casos puede verse implícito el valor numérico de π. En efecto, la historia de los diversos intentos por cuadrar el círculo, sus diferentes construcciones, el cálculo por consiguiente de áreas, son en esencia la misma historia del número π. La imposibilidad de resolver el problema de la cuadratura sólo vino a comprobarse muchos siglos después; sin embargo, los intentos en este sentido, contribuyeron en su época a incrementar poco a poco la precisión en el cálculo de áreas e, implícitamente, el valor de π.

Las aproximaciones en este período son esencialmente geométricas, y su principal actividad consistió en evaluar el área y la longitud del perímetro de un círculo, y de manera implícita π, por el cálculo de las correspondientes áreas de polígonos regulares inscritos o circunscritos a dicho círculo. El trabajo teórico central en este enfoque lo constituye el llamado método griego de la exhaución. En los primeros siglos el trabajo de aproximación fue obstaculizado por la situación del retraso de la aritmética, debido al hecho de que el actual sistema de notación numérica no había sido aún inventado. Sin embargo, los resultados obtenidos pueden considerarse sorprendentes. En la parte posterior de este período los métodos utilizados sólo requirieron una fracción mínima de los esfuerzos involucrados al comienzo, llegándose a un nivel tan alto de perfección que un progreso adicional en el estudio hacía necesaria la existencia de herramientas más poderosas.

El segundo período se inicia coincidiendo con el descubrimiento de esa herramienta esperada: el cálculo infinitesimal. Su duración se extiende por un lapso aproximado de un siglo, y se caracteriza por la aplicación de métodos analíticos poderosos para la determinación de expresiones para el cálculo de π que, por lo general, incluían funciones trigonométricas en la forma de series convergentes, no pocas de ellas empíricas y muy ingeniosas, productos infinitos y fracciones continuas. Estos nuevos métodos permitieron crear una especie de raza de calculistas de π, quienes al disponer de medios más efectivos de cálculo se dedicaron a obtener aproximaciones numéricas con una cifra cada vez mayor de decimales. Esta situación puede, sin embargo, considerarse inútil, pues si bien se aumentaba el conocimiento cuantitativo de la constante, no se daba ninguna luz sobre la verdadera naturaleza de ese número. Es evidente que tampoco pudo darse respuesta definitiva al problema de la cuadratura, o en igual forma, nada se dijo sobre el carácter racional o irracional del número. Esta falencia explica, entre otras cosas, el porqué de ese desenfreno en el cálculo de una abundante cifra de decimales para π: se guardaba la esperanza de descubrir una cierta secuencia en la aparición de dichos decimales. Si ello era posible, π era susceptible de ser racional, lo que en otras palabras indicaría que podría representarse exactamente por el cociente de dos números enteros. Más tarde se comprobaría que esta esperanza era vana. De este período puede destacarse algo importante, destinado a contribuir posteriormente a la solución del problema: Euler logró establecer una conexión entre las dos constantes matemáticas tal vez más importantes, π y e (la base de los logaritmos neperienses). La expresión resultante de $e^{\pi i} = -1$ se ha constituido, por su impresionante sencillez, en motivo de admiración de muchos matemáticos, uno de los cuales la utilizó para concluir que "Dios eternamente geometriza".

El tercer período se extiende desde mediados del siglo XVIII hasta finales del siglo XIX, y se caracteriza por la atención dirigida a toda clase de investigaciones críticas sobre la verdadera naturaleza del número π en sí mismo, considerado independiente de meras representaciones analíticas. En este período se reconoce a π como número irracional y trascendental, conduciendo por ende a conclusiones definitivas sobre el problema de la cuadratura del círculo.

PRIMER PERÍODO DEL REINADO DE LA GEOMETRÍA

Una vez ilustrado el panorama general, resulta apropiado para complementar esta breve información cronológica, hacer un recuento de aquellos momentos que podrían llamarse estelares en la apasionante historia de π.

Las primeras trazas de la determinación de π son encontradas en diferentes papiros de gran antigüedad, que a manera de catálogos incluían en las modalidades de escritura de las respectivas épocas, grupos de problemas y su correspondiente solución, reflejo del estado de las matemáticas de aquella cultura a la que pertenecen. El más conocido de ellos es el llamado papiro de Rhind, que data aproximadamente del año 1800 a. C., atribuido al escribano Ahmes.

El papiro de Rhind, en conjunto con el de Golenischev, llamados ambos en honor de sus primeros propietarios conocidos, constituyen los dos documentos matemáticos más antiguos disponibles, y son indicativos de los niveles de la aritmética y de la geometría prácticas conocidas por los egipcios en su época (Neugebauer, 1959). El papiro de Rhind, más que un tratado, es una colección de aproximadamente 85 ejercicios matemáticos y ejemplos prácticos que exhiben el uso de fracciones, la solución de ecuaciones simples y progresiones, y la medición de áreas y volúmenes. En este último aspecto, el problema 59 se relaciona con figuras que tienen que ver con el círculo, así (Newman, 1956).

> *"Un granero cilíndrico de 9 de diámetro y altura 6. ¿Cuál es la cantidad de grano que cabe en él?"*

Al resolver este problema se establece una regla por la cual el área de la base circular se calcula como igual a la de un cuadrado cuyo lado es el diámetro disminuido en una novena parte ($\ell = 8/9\, d$). Si este planteamiento se combina con la fórmula tradicional $A = \pi r^2$, se encuentra que puede deducirse un valor de $\pi = 3.1604...$ Ninguna explicación se da respecto al fundamento de este procedimiento, creyéndose que se encontró de manera completamente empírica. Respecto a lo anterior es indispensable decir lo siguiente: el escriba Ahmes no dice en ninguna parte del texto "He aquí un valor aproximado de π"; simplemente describió una aproximación de tipo metrológico que permitía evaluar el área de un círculo de diámetro dado. Se intuía la presencia de una constante en el cálculo, pero π no era en esa época reconocida como tal, y tardaría mucho en que así lo fuera. Aunque resulta práctico, en realidad es un abuso de los historiadores decir, por ejemplo, "Para los egipcios π es aproximadamente igual a...". Con esta aclaración, el recuento puede continuar.

En los libros sagrados también podría decirse que se encuentran huellas de π. En el Talmud se lee:

> *"Lo que mide tres codos alrededor, tiene un codo de ancho",*

de donde debe recordarse que el codo, al igual que otras partes del cuerpo humano, era utilizado antiguamente para identificar medidas de longitud. En la Biblia, y más específicamente en el primer Libro de los Reyes, Capítulo VII, Versículo 23, y en el segundo Libro de las Crónicas, Capítulo IV, Versículo 2, se lee al describir las construcciones del templo del Rey Salomón (aproximadamente 1000 años a. C.):

> *"Hizo así mismo un mar de fundición de diez codos de un lado a otro, perfectamente redondo; su altura era de cinco codos, y ceñíalo alrededor un cordón de treinta codos".*

Tanto la lectura del Talmud como la de la Biblia implican un valor de $\pi = 3$, magnitud que fue de uso corriente durante siglos y utilizada por varias culturas como la babilonia, la china, la griega, entre otras.

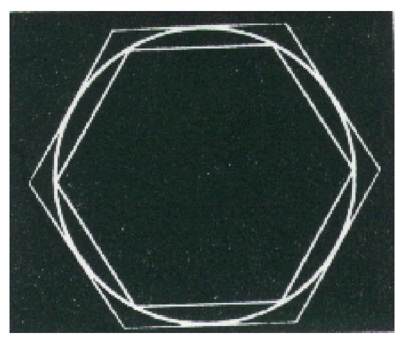
Es sin embargo a los matemáticos griegos, los creadores de la geometría como ciencia exacta, a quienes se debe el primer tratamiento matemático de los problemas de la cuadratura y rectificación del círculo. Comenzando con Tales de Mileto, quien probablemente con Pitágoras introdujo la geometría egipcia entre los griegos, fueron muchos los matemáticos y no matemáticos que se interesaron en el problema (Cohen y Drabkin, 1948). El primero en iniciar el camino correcto fue Antifón de Atenas, a quien siguió en ideas Bryson de Heraclea, ambos contemporáneos de Sócrates (Siglo V, a. C.). El método de Antifón se basó en la posibilidad de inscribir diferentes polígonos en un círculo dado. Comenzando con un cuadrado, construyó sobre cada lado de éste un triángulo isósceles con un vértice mirando hacia el arco del segmento de círculo subtendido por dicho lado. De esta manera, el nuevo polígono regular inscrito presentaba el doble de número de lados: un octágono. Repitiendo nuevamente el procedimiento se obtenía una figura inscrita con cuatro veces el número de lados del polígono original: un hexadecágono. Continuando sucesivamente de esta manera, Antifón pensó que podía llegar a obtener un polígono de tal número de lados, y por ende con una longitud de éstos tan pequeña, que ellos coincidirían con el círculo. Dado que, según él, un cuadrado podía hacerse igual en el área a cualquier polígono regular, y un círculo podía ser reemplazado por un polígono de igual área, aseguró así haber logrado la cuadratura del círculo. En vista de que su suposición es incorrecta, su resultado se convirtió en sólo una aproximación.

La mejoría al método, introducida por Bryson, consistió en considerar tanto los polígonos inscritos como los circunscritos. De esta manera, este matemático griego se convierte en uno de los primeros en introducir el concepto de límites superior e inferior en las aproximaciones. Él pensó que el área del círculo podía encontrarse al promediar las correspondientes a los polígonos inscrito y circunscrito.

Es sin embargo Arquímedes (Siglo III a. C.), considerado por muchos como el principal matemático de la antigüedad, quien en su trabajo "Sobre la medición del círculo" hace el primer tratamiento científico correcto del problema al modificar un elemento del método de Bryson: consideró los perímetros de los polígonos y el radio del círculo en lugar de las áreas. Comenzando con hexágonos y duplicando cada vez el número de lados, llegó hasta el polígono de 96 lados, obteniendo la desigualdad

$$22/7 > \pi > 223/71$$

Lo cual indica un valor entre 3.1408... y 3.1429..., resultado bastante meritorio y sorprendente si se tienen en cuenta los notables retrasos en la aritmética y las dificultades en el sistema de notación propios de la época. Este método fue prácticamente el único utilizado en los casi dos mil años que precedieron la invención de cálculo diferencial.



Otros matemáticos griegos de reconocida capacidad también se interesaron de una u otra manera en esta constante numérica. En los "Elementos" de Euclides, por ejemplo, aunque no se hace referencia explícita de carácter cuantitativo a un valor equivalente a π, sí se consignan algunos enunciados

110555964462294895493038196442881095

relacionados con el cálculo de áreas y volúmenes. Es el caso de la proposición 2 del libro XII, en la cual se establece que "círculos son uno al otro como los cuadrados de sus diámetros", lo que en términos más concretos significa que:

$$\frac{\text{Área de un círculo}}{(\text{diámetro})^2} = \text{constante}$$

Pero no se menciona nada sobre el valor de esa constante. Así mismo, la proposición 18 del libro XII establece en forma similar que:

$$\frac{\text{Volúmen de una esfera}}{(\text{diámetro})^3} = \text{constante}$$

No hace referencia sin embargo, Euclides, a la razón del perímetro de un círculo a su diámetro, ni plantea una relación entre las dos constantes antes mencionadas.

Ptolomeo (Siglo II), para citar otro caso, dio un valor de π bastante aproximado haciendo uso de unas "Tablas de cuerdas" que él mismo construyó. Esta tabla da las longitudes de las cuerdas de un círculo subtendidas por arcos de 1/2°, 1°, 1 1/2°, y así hasta 180°, o, en otras palabras, los valores de la función trigonométrica seno para ángulos que van desde 1/4° hasta 90° con incrementos de 1/4°. Expresado en términos de fracciones sexagesimales, el valor de Ptolomeo es:

$$\pi = 3 + 8/60 + 30/60^2$$

o sea 3.14166... Esta magnitud es casi exactamente el promedio aritmético de los dos valores límites dados por Arquímedes, pero resulta más precisa que éste.

En la medida en que la cultura griega entra en decadencia, el eje de la actividad matemática se traslada de lugar, y son principalmente los hidúes y los chinos quienes desarrollan nuevos cálculos en el tema. Siguiendo la idea básica del método de Arquímedes, su trabajo se concentró en la obtención de aproximaciones más precisas para el cálculo de perímetros a través de la implementación de algún tipo de relaciones analíticas entre las correspondientes longitudes de los lados de dos polígonos sucesivos inscritos al interior de un círculo, en los cuales el segundo duplica en número de lados al primero. Los resultados de algunos de estos procedimientos y otros relacionados se tradujeron en una especie de normas consagradas por diferentes matemáticos de la época en sus respectivos textos, de altísima utilidad práctica pues su aplicación permitía la simplificación de diversos cálculos rutinarios (Eves, 1970). Aryabhatta (siglo V), para mencionar sólo un nombre al respecto entre los matemáticos hidúes más prestigiosos de la antigüedad, estableció en sus "Lecciones de Cálculo" una serie de reglas para la estimación de áreas y volúmenes de distintos tipos de figuras, entre las cuales resulta apropiado citar las siguientes:

Regla 7: La mitad de la circunferencia (perímetro) multiplicada por la mitad del diámetro es el área de un círculo. Esta área multiplicada por su propia raíz cuadrada es el volumen exacto de la esfera.

Regla 10: Agregue 4 a 100; multiplique por 8, y agregue 62.000. El resultado es aproximadamente la circunferencia (perímetro) de un círculo cuyo diámetro es 20.000.

Una sencilla inspección de estas reglas permite introducirse en una serie de análisis interesantes. Haciendo uso de la regla 10 puede claramente obtenerse un valor para π de 3.1416. Por otro lado, la aplicación de la primera parte de la regla 7 hace que el cálculo de un área circular coincida con el que puede hallarse por medio de la tradicional fórmula $A = \pi R^2$. La segunda parte de esta regla puede dar lugar inicialmente al establecimiento de al menos dos hipótesis. En primera instancia, si se compara el procedimiento de cálculo sugerido con la actual y también tradicional fórmula conocida, $V = 4/3\,\pi R^3$, entonces,

$$V = A\sqrt{A} = \pi R^2\sqrt{\pi R^2} = 4/3\,\pi R^3$$

lo que conduce a un valor de $\pi = 16/9$ o 1.777 ..., sustancialmente menor al indicado por la regla 10. De otra parte, si se procede con la misma comparación anterior, pero reemplazando la constante 3.1416 en el cálculo del área del círculo se obtiene

$$3.1416R^2\sqrt{3.1416R^2} = 4/3\pi R^3$$

de donde se halla $\pi = 4.1761...$, valor demasiado elevado en comparación con 3.1416. Varias interpretaciones se han dado para explicar la aparente existencia de tres valores numéricos diferentes para lo que actualmente se conoce constituye una única constante. Una de ellas puede ser la de considerar incorrecta la técnica o el método de estimación del volumen de la esfera planteado por parte de Aryabhatta. Otra, aceptar que si bien éste y otros matemáticos contemporáneos reconocían la proporcionalidad entre el volumen de una esfera y el cubo de su radio (o de su diámetro), no parece haber existido igual consenso con respecto a la constante respectiva, y Aryabhatta en particular podría haber trabajado indirectamente con un valor diferente a $4\pi/3$. De cualquier manera estas son sólo especulaciones y como ellas pueden surgir otras más. Lo que sí puede concluirse es que con base en lo que aparece implícito desde las propias proposiciones de Euclides, y en el análisis de las recién planteadas reglas de cálculo de Aryabhatta, además de muchos otros documentos, resulta bastante razonable suponer que en las civilizaciones antiguas, y no se sabe hasta qué época posteriormente, hubo claridad simultánea en los métodos de estimación de perímetros, áreas circulares y volúmenes esféricos. De igual manera, y en consecuencia, no puede haber sido reconocido el hecho de que hubiera una misma constante (π) involucrada en las correspondientes tres expresiones de cálculo.

Siguiendo con el recuento de las primeras estimaciones de π, debe mirarse también a las matemáticas chinas de la antigüedad, en donde no fueron pocos los trabajos que implícitamente se relacionan con el cálculo de esta constante geométrica. Zhang Heng (siglo II), por ejemplo, estableció que el cuadrado del perímetro de un círculo es al cuadrado del perímetro del cuadrado circunscrito a dicho círculo como 5 es a 8; o en términos matemáticos $(2\pi R)^2 : (8R)^2 = 5 : 8$. De aquí se obtiene que $\pi = \sqrt{10} = 3.1622$ ..., valor al cual también arribó posteriormente por diferentes medios el matemático hindú Brahmagupta (siglo VII), y que fue ampliamente utilizado durante la Edad Media.

Otro matemático chino, Liu Hui (siglo III), obtuvo resultados aún más precisos en el cálculo de π. En su trabajo plantea que el círculo es mayor en el área que el polígono inscrito, pero menor que el mismo polígono aumentado con todos los rectángulos circunscritos construidos sobre cada uno de los lados de éste, lo cual resulta evidente. El cálculo de Liu Hui del área del polígono inscrito no es completamente correcto, pero, aún así, encuentra, con un polígono regular de 192 lados, una aproximación bastante notable con los límites.

$$3.141024 < \pi < 3,142704$$

La máxima aproximación china fue obtenida dos siglos después con el valor utilizado por Tsu-Chung Chih,

$$\pi = 355/113 \text{ o } 3.14159$$

sobre el cual existen muchas especulaciones acerca del verdadero método de derivación. En términos de valores fraccionales, éste, que da seis cifras decimales exactas, constituye el más preciso registrado hasta el siglo XVI, y recibió amplio reconocimiento de los matemáticos occidentales cuando fue redescubierto y obtenido nuevamente en 1573 y 1585 por el alemán Valentine Otto y el holandés Adriaen Anthonisz respectivamente.

El período comprendido entre los siglos VIII al XV marca la gran época de la civilización islámica, durante la cual surgieron una serie de matemáticos a quienes se debe, entre otras cosas, el haber completado la aritmética de un sistema decimal que incluye fracciones decimales, la creación del álgebra, descubrimientos importantes en trigonometría plana y esférica y sistematización de estas ciencias, así como la creación de refinados procedimientos para el hallazgo de soluciones numéricas de ecuaciones. Algunos de ellos también dejaron su huella en la extensa historia de π. Tal es el caso de Al khwarizmi (siglo IX), a quien se atribuye haber trabajado indistintamente con tres valores diferentes: $\sqrt{10}$, 22/7 y 62832/20000, el último de ellos especialmente para cálculos astronómicos, y por los que se ha llegado a conclusiones de grandes influencias de culturas precedentes sobre el mundo islámico.

Otro nombre importante es el Al-Biruni (siglo X-XI), tal vez el primero de los escritores árabes en encontrar el valor de π con mayor grado de precisión. Siguiendo el método de estimación de longitudes de cuerdas, mencionado previamente al hacer referencia a Ptolomeo, halló un valor ligeramente superior a 3.14166. Pero sin lugar a dudas el trabajo más relevante es el debido a Al-Kashi, quien en 1424 halló un valor de 2π el cual expresó en fracciones decimales, siendo su resultado correcto en 16 cifras. Su método se basó en una meticulosa planeación de aproximaciones numéricas que le permitió calcular los perímetros de los polígonos regulares de 805.306.368 lados, inscrito y circunscrito a un círculo dado. Según sus propias palabras tomadas de los textos, su propósito era obtener un valor de tal precisión que cuando fuese usado para calcular el perímetro del universo de acuerdo con las dimensiones antiguas, el resultado no difiera del valor verdadero en una magnitud mayor que el espesor de un pelo de un caballo.

A lo largo de la edad media el conocimiento de los matemáticos griegos e hindúes es introducido en Europa por parte de los árabes, principalmente por medio de traducciones de diversos trabajos de Ptolomeo, Euclides y algunos de Arquímedes, entre los cuales se incluye el tratado de este último sobre la medición del círculo. La historia de π se traslada entonces al viejo continente. Los progresos obtenidos en el llamado período del Renacimiento no resultaron ser numerosos, siendo de aquellos pocos de destacar algunos logros debidos ala figura de Leonardo de Pisa (siglos XII y XIII), llamado también Fibonacci, quien obtuvo un valor medio para π de 3.1418. El método seguido por él fue esencialmente el de Arquímedes, aún vigente, pero con una ventaja adicional sobre el gran hombre de ciencia griego: ya disponía de la numeración decimal, que él mismo se encargó de difundir posteriormente en toda Europa. Posteriormente puede mencionarse también al Cardenal Nicolás de Cusa (siglo XV) quien propuso un valor dado por $3/4(\sqrt{3}+\sqrt{6})$, o sea $\pi=3.13615...$

Uno de los últimos adelantos obtenidos con ayuda del método de la exhaución fue el debido al matemático francés François Vieta, quien en 1579, trabajando con un polígono de 6×2^{16} (393.216) lados, encuentra un valor de π correcto en 9 cifras decimales. Sin embargo, el mayor aporte de Vieta se presenta trece años después, con el viraje que da a las técnicas de la estimación de π al poner en práctica el equivalente algebraico del método geométrico de los polígonos al traducirlo en la serie de términos infinitos. Esta fórmula se constituye en la primera expresión analítica obtenida para la determinación del valor de π.

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \times \ldots}$$

Es en esta época cuando comienza la llamada "carrera por los decimales", hecho parcialmente explicable por la atracción completamente nueva de las fracciones decimales. Un contemporáneo de Vieta, el geómetra holandés Adrian Romanus, logra encontrar 15 decimales correctos con un polígono de 15×2^{24} lados (más de 251 millones) y casi que simultáneamente aparece la figura de tal vez el más célebre entre los infatigables calculistas de π : el alemán Ludolph Van Ceulen. Este matemático se ocupó de la estimación de π durante prácticamente toda su vida, como lo demuestran los resultados obtenidos, inicialmente en 1596 con 20 cifras decimales correctas a partir de los perímetros de los polígonos inscritos y circunscritos de 60×2^{33} lados (algo más de 515 mil millones) y posteriormente en 1609 con 35 decimales mediante polígonos aún más impresionantes de 2^{62} (más de cuatro trillones de lados). Estos trabajos, que reflejan una casi que incrible disciplina científica o al menos numérica, le permitieron pasar a la posteridad, ya que aún actualmente en algunos lugares de Alemania se hace referencia a π como "el número Ludolphiano" (Von Baravalle, 1971).

SEGUNDO PERÍODO: EL ANÁLISIS

El establecimiento de los fundamentos del cálculo diferencial e integral por parte de Newton y Leibniz durante la segunda mitad del siglo XVII, y los posteriores desarrollos en esta área abren, como se mencionó previamente en el marco general, la segunda parte de esta historia.

La aparición de nuevos métodos que logran expresar a π de manera analítica, al desarrollarlo como diferentes series infinitas de términos, hizo que los estudios geométricos o numéricos de polígonos se volvieran obsoletos. La nueva técnica había sido ya desarrollada de manera pionera, aunque rudimentaria, por matemáticos hindúes varios siglos atrás, pero sus trabajos no recibieron en su época, ni aún posteriormente toda la divulgación necesaria.

El primer trabajo desarrollado en este sentido es el debido al inglés John Wallis a finales del siglo, conocido posteriormente por haber sido el primero en formular la moderna teoría aritmética de los límites. Basado en un método para determinar analíticamente el área de un semicírculo, Wallis obtuvo la expresión de productos infinitos:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \times 2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times \ldots}{1 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times \ldots}$$

Un contemporáneo de Wallis y primer presidente de la Royal Society de Londres, Lord Brouncker, hace posteriormente un desarrollo en fracciones continuas con la serie:

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \ldots\ldots}}}}}$$

El punto más destacado lo dio sin embargo el matemático y filósofo Gottfried Von Leibniz, quien, como parte de un trabajo sobre funciones trigonométricas, descubrió (en forma simultánea pero independiente con el ingles James Gregory) en 1674, un grupo general de expresiones para encontrar a π como el límite de series infinitas, un caso particular de las cuales es:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$$

48815209209628292540917153643678925

Resulta sencillo ponerse de acuerdo en lo difícil que sería imaginarse una expresión con fracciones más simples y de mayor regularidad. Gran parte de la "competencia" se centró entonces en la obtención de series cuya convergencia fuera mayor y más rápida que las de las previamente propuestas. Nombres de brillantes matemáticos y geómetras como Euler, Machin, de Lagny, entre muchos otros, empezaron a aparecer en el inventario de π. El mismo Newton calculó π con 15 cifras decimales exactas utilizando sólo los primeros términos de una serie que puede deducirse como una expresión de la función trigonométrica seno. Al respecto, posteriormente le comentó a un colega: "Me da vergüenza comentar a cuántas cifras llevé estos cálculos por no tener otra cosa qué hacer en aquel momento". El trabajo de series no se detuvo a partir de esta época, y aún actualmente continúan publicándose gran número de expresiones y algoritmos, los cuales exhiben en su gran mayoría un mucho más elevado rigor matemático, cuyo manejo sólo ha sido posible gracias a los vertiginosos progresos simultáneos en el diseño de computadores y ordenadores personales.

Además de los aspectos meramente calculistas, un elemento muy importante sucede durante este período relacionado con la identidad y más estrictamente con la notación de π. En 1706, W. Jones utiliza por primera vez en un texto matemático el símbolo para representar la constante que relaciona al perímetro de una circunferencia con su diámetro. Diversas figuras habían sido adoptadas antes para representar esa constante, las cuales obedecían principalmente a criterios personales de cada uno de los autores, sin que, por ende, pudiera tenerse un consenso en este sentido. Se cree que la elección de Jones surgió de la inicial de la palabra en griego que significa perímetro. La adopción definitiva del símbolo π sólo se logró, sin embargo, a partir de 1737, cuando Euler lo utiliza en todos sus trabajos posteriores.

TERCER PERÍODO: LA TRASCENDENCIA

El tercer período de esta historia podría resumirse en las respuestas que se obtuvieron a la pregunta: ¿Cuál es el lugar de entre los números?. En efecto, los trabajos realizados durante este período se enfocaron principalmente a la investigación de la real naturaleza de π. Debido a la estrecha relación de este número con la constante e, la base de los logaritmos naturales, la investigación de los dos números fue llevada casi de manera simultánea.

El primer paso importante lo logra en 1776 el alemán J.H. Lambert, cuando presenta su prueba de que tanto e como π son números irracionales, lo que en otras palabras significa que ninguno de los dos puede ser solución de una ecuación de primer grado con coeficientes enteros. Esta demostración empezaba a cerrar las puertas de la solución al problema de la cuadratura del círculo o, de que en cierta manera, la aparición de las cifras decimales de π fuera un hecho cuantitativamente previsible. Algunos trabajos del siglo XIX mostraron que dicha solución sería posible si pudiera expresarse como cualquier tipo de combinación finita de radicales o términos de raíces cuadradas, es decir, si π resultara como solución de un grupo de ecuaciones de segundo grado. De esta manera el problema geométrico se convertiría en uno puramente algebraico, el cual tendría inmediata solución.

La probabilidad así planteada pronto dejó de tener cualquier vigencia, cuando Liouville demuestra en 1840 la existencia de los números trascendentales, es decir, aquellos que no son solución de ninguna ecuación algebraica de cualquier grado con coeficientes enteros, y cuando posteriormente Lindemann encuentra en 1882 que π es uno de ellos. El problema había sido por fin resuelto: la cuadratura del círculo es imposible; el hombre tardó más de 25 siglos para demostrarlo, lo cual sirvió para que un autor conocedor de toda la historia dijera con absoluta razón: "la cualidad de la mente humana es su colosal paciencia".

No puede decirse, sin embargo, que en 1882 se detiene la historia de π. De una parte el surgimiento continuo de grandes y potentes computadores ha provocado un nuevo curso en el cálculo de las cifras decimales correspondientes, justificando la investigación de nuevos métodos de cálculo. Por otro lado, los matemáticos continúan estudiando en busca de nuevas propiedades de π para tratar, posiblemente, de diferenciarlo de otros números trascendentales. De cualquier manera... la historia continúa.

LA CARRERA POR LOS DECIMALES

El estudio de la historia del número π ha permitido reconocer la existencia a lo largo del tiempo, de una "raza" de hombres muy especiales que puede denominarse como la de los cazadores de decimales. Creada por aplicantes del método de exhaución de Arquímedes con el cual, como ya se mencionó, se logró obtener hasta 35 cifras decimales exactas en un terriblemente tedioso cálculo manual, fue continuada por los calculistas analíticos, quienes a través de sus diferentes series geométricas de funciones trigonométricas lograron reducir la laboriosidad y, simultáneamente, aumentar la cantidad de decimales obtenidos. Es así como en 1699 el astrónomo Abraham Sharp calcula 72 cifras gracias a las series; luego el matemático francés Fuat de Lagny obtiene 127 en 1717, y posteriormente el célebre calculista alemán Zacharias Dahse determina 200 decimales exactos en 1844. Los trabajos cada vez se hacen más notables: en 1873 Daniel Shanks calcula 707 cifras, de las cuales sólo 527 son correctas, según se verificó de manera posterior.

Esta exclusiva raza en la que el número de personas adscritas resulta más bien reducido, tuvo su explosión definitiva e inusitada con la aparición del computador (Wrench, 1960). En efecto, en Septiembre de 1949 George W. Reitwiesner y sus colaboradores utilizaron el primer computador digital diseñado, en el sentido moderno de la palabra, el ENIAC (construido entre 1942 y 1945), y evaluaron 2.037 cifras decimales de π en un trabajo que tomó alrededor de 70 horas. La fórmula utilizada era una serie debida al inglés Machin, deducida dos siglos antes.

Los retos para mejorar esta hazaña no se hicieron esperar. Ya en 1954 se computaron 3.089 cifras en sólo 13 minutos, en 1958 diez mil decimales en un lapso de una hora y 40 minutos (100 cifras por minuto aproximadamente), y en 1961 ya se calculaban 20.000 cifras en sólo 39 minutos. En todos estos cómputos y en los que vendrían enseguida la ecuación utilizada era nuevamente una serie geométrica, aunque no necesariamente la misma en todos los casos. En 1961 se rompió una barrera: Daniel Shanks y John Wrench calcularon 100.265 cifras decimales en un tiempo de 8 horas y 43 minutos, duplicando prácticamente la velocidad del cálculo. En 1966 un computador IBM permitió la evaluación de 250.000 cifras, y sólo un año después se doblaba esta cantidad. El crecimiento era vertiginoso, y la barrera del millón de cifras se superó en 1973 gracias a labor de dos matemáticos franceses. Todo parecía indicar que no había límites al número de decimales que podían calcularse. Sin embargo, no resultó así; los métodos tradicionales hasta ese momento utilizados para realizar operaciones aritméticas tenían sus limitaciones, y ni aún incrementando la velocidad de cómputo, gracias a nuevos equipos, los cálculos podían agilizarse. Para ilustrar esto puede citarse como ejemplo que para calcular los primeros mil millones de cifras hubieran sido necesarios más de 25 años de trabajo continuo computacional.

Es en ese momento, cuando paralelamente a la aparición de los equipos más veloces surgen métodos nuevos y más eficaces de multiplicar mediante ordenadores dos números grandes y algoritmos iterativos de convergencia más acelerada hacia π . Algunos de estos algoritmos son debidos al trabajo de un matemático hindú, Srinivasa Ramanujan, considerado por no pocos como uno de esos casos de genialidad empírica en determinada rama de la ciencia. Ramanujan, a comienzos del presente siglo, formuló un gran número de series y aproximaciones para el cálculo de π , fruto de su extraordinaria capacidad intuitiva y de la fascinación que lo cautivó por este número en gran parte de su trabajo. Los algoritmos utilizados para evaluar las series por él deducidas se aproximan en altísimo grado a los óptimos posibles, y sólo han podido ponerse en práctica medio siglo después de su formulación, siendo ellos los responsables de los escandalosos cálculos actuales de π (Borwein yBorwein, 1988).

De esta manera, dos japoneses alcanzaron la meta de dos millones de cifras en 1981, aumentada cuatro años después a 10 millones, y un año más tarde a 29.360.000 cifras. Un científico de computadores japonés, Yasumasa Kanada, de la Universidad de Tokio, se ha propuesto romper cualquier barrera imaginable: en 1987 calculó 134 millones de cifras en un cómputo llevado a cabo en un supercomputador NEC SX-2, en un lapso de 36 horas (Peterson, 1986). En 1988 el mismo Kanada batió su propio record al calcular en sólo 6 horas, con un supercomputador fabricado por Hitachi, la escalofriante cifra de 201.326.000 decimales (!), y ya ha manifestado que su propósito inmediato es rebasar la barrera de los 400 millones de dígitos (Peterson, 1988).

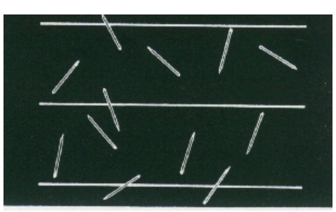
Bueno, todo esto es correcto. Los lectores probablemente estarán tan desconcertados como el autor cuando se enteró de estos cálculos. Así mismo tendrán una pregunta por demás práctica: ¿Para qué calcular tantas cifras decimales de π ? Seguramente no les satisfará la respuesta que dio el actual poseedor de los records, el japonés Kanada. Al manifestar que su motivación iba más allá del valor práctico, dijo: "Es como el Monte Everest. Lo hago sencillamente porque está allí". Al preguntársele cuándo se detendría en sus cálculos, respondió: "Me gustaría continuar y continuar indefinidamente".

La pregunta sigue vigente: si cuatro cifras decimales son más que suficientes para realizar cualquier cálculo con errores mucho menores a los tradicionalmente aceptados; si diez son suficientes para estimar la circunferencia de la tierra con una precisión de fracciones de pulgada; si dieciséis dígitos son necesarios para calcular un círculo de igual diámetro al de la órbita terrestre con un error inferior a un milímetro; y si con 39 cifras decimales es posible estimar el perímetro de una circunferencia capaz de abarcar todo el universo conocido, incurriendo en un error menor a la longitud del radio de un átomo de hidrógeno (10^{-12}cm.); entonces, ¿Para qué tantos decimales?. Son dos las respuestas satisfactorias que pueden darse: la primera es que π se ha convertido en una especie de parámetro, cuyo cálculo sirve para obtener una medida comparativa de la rapidez y confiabilidad de los nuevos equipos de cómputo respecto a aquellos anteriores o de la competencia; la otra, es la esperanza de encontrar en ese infinito mundo de información pautas nuevas sobre los misterios que rodean a este número fascinante, cuya naturaleza aún está lejos de ser completamente entendible. Lo que sí resulta definitivamente aventurado es llegar a imaginarse hasta dónde y cuándo continuarán estos cálculos matemáticos.

11738193261179310511854807446237996222

LA PROBABILIDAD Y EL NÚMERO π

Al igual que en todas las ramas de las matemáticas superiores, el número π aparece muy frecuentemente en la teoría de probabilidades. Es precisamente en esta área en la que surge una muy ingeniosa forma de determinar el valor de π (Gridgeman, 1960), muy diferente a todas aquellas geométricas o analíticas planteadas, y propuesta y resuelta por el naturalista francés George Louis Leclerc, Conde de Buffon, en 1777. El procedimiento, conocido como el problema de las agujas de Buffon, resulta muy sencillo y fácil de desarrollar por cualquier persona, y consiste en lo siguiente: sobre una hoja de papel se dibuja una serie de líneas rectas paralelas, separadas entre sí una distancia d. Enseguida, se lanza repetidamente y de manera por supuesto aleatoria una aguja de longitud h ($h < d$) y se cuentan tanto el número total de lanzamientos (N) como el de ocasiones (P) en que la aguja al caer toca algunas de las líneas dibujadas. Por un procedimiento aceptado, Buffon demostró que la probabilidad de que la aguja corte alguna de las líneas depende de π, y resulta exactamente igual a $2h/\pi d$. En otras palabras, si el experimento se lleva a cabo un número elevado de veces (mil o más, por decir algo), el cociente dado por $2hN/Pd$ resulta una bastante buena aproximación de π, mejor en la medida en que N se incrementa. La historia reporta que un matemático italiano de apellido Lazzarini tuvo la muy meritoria paciencia de realizar el experimento manualmente de 3.804 lanzamientos, obteniendo para π el muy aceptable valor de 3.1415929 (seis cifras decimales correctas). Hoy en día esos experimentos pueden simularse perfectamente en un equipo de computador.



ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE π

Adicionalmente a ese nuevo universo matemático cada vez más elaborado que rodea su cálculo y comprensión, π ha servido también como fuente de inspiración a toda una gama de curiosidades y anécdotas que recrean y amenizan su historia, rebajando un tanto ese tensionante rigor científico. Se mencionan aquí sólo algunas de las muchas curiosidades que enriquecen esta historia.

π es la única constante científica, al menos hasta donde el autor conoce, cuyo valor preciso ha tratado de instituirse de manera legal por un proyecto legislativo (Greenblatt, 1965). En efecto, esto ocurrió en los Estados Unidos, y más específicamente en el Estado de Indiana en 1897. El autor del proyecto era un físico, Edwin J. Goodwin, quien lo tituló: "Un proyecto que introduce una nueva verdad matemática". Él aseguraba haber logrado cuadrar el círculo, y al proponer legislar para un valor igual a 3, ofrecía su contribución como un obsequio gratuito para uso solamente en el Estado de Indiana. Si otros lugares querían hacer uso de este valor tendrían que pagar las regalías correspondientes.

La casa de representantes de Indiana lo aprobó de manera unánime luego de que un Comité de Educación al cual se remitió su estudio emitiera un concepto positivo a la ponencia. Cinco días después pasó su primera lectura en el Senado sin ningún comentario en contra. Sólo la presencia de un profesor de la Universidad de Purdue, quien de manera coincidencial visitaba la Casa de Representantes durante la segunda lectura del proyecto, convenció al Senado de posponer su estudio indefinidamente. El proyecto no volvió a aparecer en la agenda de la legislatura. Afortunadamente esto ocurrió así, pues en caso contrario todas las ruedas de dicho Estado, para poder ajustarse a la ley, tendrían que haberse convertido en hexagonales (Asimov, 1986).

Otra curiosidad radica en lo que podrían llamarse elucubraciones filosóficas trascendentales sobre el número π. Una de ellas se refiere a la sabiduría infinita que podría estar escondida en el número π (Vélez, 1988), y se basa en una codificación particular de los elementos propios de la escritura, consistente en sustituir cada letra o signo de puntuación por medio de un número previamente convenido. De esta manera, un texto cualquiera podría convertirse en una secuencia numérica tan extensa como el texto mismo, o viceversa. Dado el inmenso e infinito desarrollo de los decimales de π, existiría la posibilidad de encontrar allí codificada toda clase de información, pasada, presente y futura, literaria y científica, pública y personal, verdadera o falsa. Esto como especulación resulta resulta válido; desde el punto de vista práctico, inútil y muy poco menos que utópico.

Otros apuntes de diferentes direcciones hacen más "deliciosa" la historia de π. Por ejemplo, en la construcción de la famosa pirámide de Kheops; sus dimensiones originales son de 232.805 metros de base y 148.208 metros de altura. Si se divide el doble de la primera de estas cifras por la segunda se obtiene un valor de π con cinco decimales exactos, y un error inferior a seis millonésimas (!) . Sin embargo este hecho ha sido considerado simplemente una coincidencia... una asombrosa coincidencia (Boyer, 1968).

Por otro lado, π también ha despertado y servido de muro de inspiración para poetas en varias lenguas. La concepción de dichas poesías ha seguido una línea mnemónica, de tal manera que los números de letras de las palabras son las cifras consecutivas en la expresión decimal de π. A continuación se presenta la única poesía en español conocida al respecto, compuesta por el colombiano R. Nieto Paris, la cual permite registrar los primeros ochenta decimales de esta constante. Es importante aclarar que una palabra de 10 letras corresponde a la cifra 0, y se aumenta en una unidad el número de letras de la palabra anterior. El texto completo de la poesía es el siguiente:

Soy π : lema y razón ingeniosa
de hombre sabio que, serie preciosa
valorando, enunció magistral.

con mi ley singular, bien medido,
el Grande Orbe, por fin reducido
fue al sistema ordinario real.

Arquímedes en ciencias preciado
crea π , monumento afamado,
y aunque intérmina dio valuación,
periferia del círculo supo,
duplicando geométrico grupo
resolver y apreciarle extensión.

Teorema legó memorable
como raro favor admirable
de la espléndida ciencia inmortal
y amplia ley, filosófica fuente
de profunda verdad ascendente
magnitud descubrió universal.

Se conocen composiciones similares en otros idiomas como inglés, ruso, alemán, rumano y francés.

En otra área, puede mencionarse también el libro de Records Guinness, que en su edición de 1988, consigna en la categoría de memoria la "hazaña" de un japonés, Hideaki Tomoyori (nacido en 1932), quien el 9 y el 10 de marzo de 1987 recitó en la University Club House de T'Sukuba las primeras 40.000 cifras decimales de π en un tiempo de 17 horas y 21 minutos, incluyendo 4 horas y 15 minutos en total de descanso. De esta manera, él mismo superó su propia marca de 15.151 cifras, establecida en 1979, y que constituyó, en su momento, el mayor registro numérico al respecto.

COMENTARIOS DEL AUTOR

La historia del número π es tan extensa que el presente artículo sólo puede representar una muy pequeña fracción de ella. Su riqueza en aspectos matemáticos, anécdotas simpáticas, curiosidades humanas, paradojas y fantasías, se constituye en una maravillosa ventana para recrearse viendo uno de los tantos caminos por donde a veces de manera firme y segura, y en otras ocasiones poco clara, el hombre se ha desplazado en su propósito de dominar la ciencia. Seguramente este panorama de apuntes es el que ha motivado la fascinación del tema, no sólo para matemáticos, sino para muchas clases de personas en general.

BIBLIOGRAFÍA

ASIMOV, I., *De los números y sus historias*, pp. 85-112. Ediciones Orbis, España (1986).

BOCHNER, S., *The role of mathematics in the rise of Science*, Seccción 2, Princenton University Press, Princenton (1966).

BORWEIN, J.M. Y BORWEIN, P.B., *Ramanujan y el número* π. Investigación y Ciencia, No. 139, pp. 72-80 (abril 1988)

BOYER, C.B., *A history of Mathematics*, p. 11, John Wiley &Sons, New York (1968)

COHEN M.R. Y DRABKIN. I.E., *A source book in greek science, Sección: Mathematics*, pp. 5962, Harvard University Press, Cambridge (1948).

EVES, H., *An introduction to the history of mathematics* p. 189. Holt. Rinehart and Winston, New York (1970).

GREENBLATT, M.H., *The legal value of* π *and some related mathematical anomalies*. American Scientist 53 (4), 427A-432A (1965)

GRIDGEMAN, N.T., *Geometric Probability and the number* π, "Scripta Mathematica" 25, 183 195 (1960)

NEUGEBAUER, O., *The exact sciences in antiquity,* 2nd. ed., pp. 71-96, Dover Publications Inc., New York (1969).

NEWMAN J.R., *The rhind papyrus, en The World of mathematics*, vol. 1, pp. 170-178, Simon and Schuster, New York (1956)

PETERSON, I., *Following* π *down the decimal trail*, Science News 133 (4), 215 (Abril 2, 1988).

PETERSON, I., *Millions of digits of* π, Science news, 131 (6). p. 91 (feb. 8, 1986)

VÉLEZ, A., *Curiosidades y Misterios del Número* π, Revista Universidad Eafit (69), pp. 97-108 (1988).

VON BARAVALLE, H., *The number* π *en Historical Topics for the mathematics class room.* Thirty first year-book, pp 148-153; The national Council of Teachers of Mathematics, Washington (1971).

WRENCH, JR. J.W., *The evolution of extended decimal aproximations to* π*,* Mathematics Teacher 53 (12), 644-650 (1960).